2次元イジング模型の図形の方法:格子点の分割と合併(離散数理モデルにおける最適組合せ構造)

守田, 徹

数理解析研究所講究録
第 820 巻 1993 年 47-53

2次元イジング模型の図形の方法
格子点の分割と合併

東北大 工 守田 徹 (Tohru Morita)

イジング模型は磁性体の最も簡単なモデルである。格子の上で格子点にスピンがあり、上又は下を向く。隣合うスピン間に相互作用があり、それらを同じ方向又は逆の方向に向けようとする。ここでは、相互作用があるスピン間を線分で結ぶとき、それらが互に交差しないような2次元のイジング模型を考える。この体系の熱力学的量は分配関数Zと呼ばれる量により決まる。N個のスピンからなる、温度のTの体系について、図形の方法により、その量は

$$Z = 2^N\{\Pi_{(i,j)}(\cosh(J_{ij}/k_B T))\}Z_1 \tag{1}$$

$$Z_1 = \exp\{\text{格子上の格子点と最近接格子点を結ぶボンドでできたループの和}\} \tag{2}$$

と表される。(1)で添字i, jは格子点またはその上のスピンの番号である。(1)の積は相互作用があるスピンの対(i, j)についてであり、J_{ij}は(i, j)間の相互作用の大きさ、k_Bはボルツ

マン定数である。ループの寄与は次の因子の積である:

(i)格子点 i と j を結ぶボンドに $\tanh(J_{ij}/k_BT)$, (ii)交差点に-1, (iii)図の対称性の数の逆数。

Z_1 は

$$Z_1^2 = \exp\{\text{向きのついたループの和}\} \tag{3}$$

$$= \det\{\delta_{ii'}\,\delta_{\nu\nu'} - w_{i,\nu;i',\nu'}\} \tag{4}$$

と表される。ここで、ループ上のボンドに向きがついたものをステップと呼ぶと、$w_{i,\nu;i',\nu'}$ は、ループ上の「格子点 i' から ν' 向きのステップの次に i から ν 方向へのステップが現われる」ときの因子で、$\tanh(J_{ii'}/k_BT)$ に符号因子 $\theta_{i,\nu;i',\nu'}$ をかけたものある。符号因子は交差点のないループを一周するときに積が-1となるようにつけられる。

以下では、格子点が x 方向に K 個、y 方向に L 個並んでいて、$N=KL$ であるとして話を進める。格子に並進対称性と循回対称性があれば、Z_1^2 は

$$Z_1^2 = \prod_{k=0}^{K-1}\prod_{l=0}^{L-1}\det\{\delta_{\nu\nu'} - w_{\nu,\nu'}(k,l)\}, \tag{5}$$

と書かれる。ここで

$$w_{\nu,\nu'}(k,l) = \sum_{i'} w_{i,\nu;i',\nu'}\; e^{2\pi ikx/K}\; e^{2\pi ily/K} \tag{6}$$

である。この和の中で x, y は格子点 i' と i の座標の差の x 方向成分、y 方向成分を格子間隔を単位として測ったものである。

(4)は平面上の体系については厳密であるが、トーラス上の系では厳密ではない。しかし、トーラス上の系に適用して得られた(5)は$K\to\infty$、$L\to\infty$の極限で正しい熱力学的量を与えるので、ここでは(5)を採用する。ここの行列式は、正方格子ならば4行4列、3角格子ならば6行6列である。以上の詳細は、文献1,2,3に与えられている。

3角格子で、図1に示すように1つの格子点を複数個に分割し、更に複数個の格子点を合併すると、格子は正方格子になる。(3)で考えることにする。元の図上のループと正方格子上の対応するループの寄与が等しくなるように、格子点に対しステップから次のステップへの組に因子を導入する。(b)では1つの格子点は3つの格子点に分割されているが、それらを結ぶ2本の線上にあるステップにたいする因子を1とする。(b)で点線の丸で囲まれた3つの格子点は、(c)では1つの格子点に合併される。このとき、点線の丸の左から上へのステップ及びその逆には

$$(t_s+t_h t_v)/(1+t_s t_h t_v)$$

という因子をつけることになる。ここでt_s, t_h, t_vはtanh$(J_s/k_B T)$、tanh$(J_h/k_B T)$、tanh$(J_v/k_B T)$を表す。J_s, J_h, J_vは斜めの線、水平線、垂直の線で結ばれたスピン間の相互作用を表す。分子は、斜めの線でまっすぐ行けばt_s、左から右に行き上に行

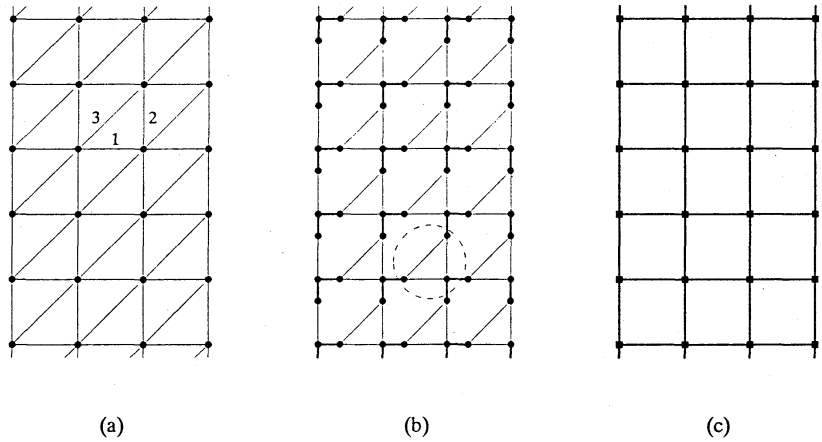

図1.(a) 3角格子、(b) 格子点の分割により作られた格子。
(c) 格子点の合併の結果として正方格子に。

けば$t_h t_v$であることによる。3角形を何回もまわると、1回まわる毎に因子$t_s t_h t_v$があり、交差点の符号-1があるため、等比級数となり、分母の因子がつく。他のステップについても同様に計算される。Z_1^2は(a)の格子上、(b)の格子上ではループで(3)と表される。(b)の点線の円で囲まれた3角形上のループは1つの向き当たり

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-t_s t_h t_v)^n = \ln(1+t_s t_h t_v)$$

となる。これは(c)の格子上ではループにならないので、別に書いて

$$Z_1^2 = (1+t_s t_h t_v)^{2N}$$
$$\times\exp(\text{(c)上の向きのついたループの和}) \qquad (7)$$

となる。右辺の第2の因子は、格子に並進対称性と循回対称

性があれば、4行4列の行列式で(5)の形に表されることになる。以上の詳細は文献4にある。そこでは、3角以外の格子についても述べられている。

ここで、格子点の合併が行列式(4)についてのどのような計算に対応するかを述べておく。1つの格子点に合併される格子点とそれらを結ぶ線を考える。それらの線上に可能なステップの集合をαとし、格子上でそれ以外の可能なステップの集合をβとする。行列式(4)は

$$Z_1^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \tag{8}$$

という形をしている。Aはαのステップ間、Dはβのステップ間、Bはβからαへ、Cはαからβへのブロック行列である。これを

$$Z_1^2 = \begin{vmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$= |\ A\ |\,|\ D-CA^{-1}B\ | \tag{10}$$

と変形する。ここでIとOは単位行列と0行列である。合併は(8)から(10)への書きかえに相当する。

次に、格子点の分割について考える。格子点1個にn個の部分β_1, β_2, . . . β_nが結ばれているとする。その格子点をn個に分け、それらをn-1本の線で次々に結ぶ場合を考える。(4)

は

$$\begin{vmatrix} D_1-C_1B_1 & -C_1B_2 & \ldots & -C_1B_n & E_1 \\ -C_2B_1 & D_2-C_2B_2 & \ldots & -C_2B_n & E_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -C_nB_1 & -C_nB_2 & \ldots & D_n-C_nB_n & E_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n & D' \end{vmatrix} \tag{11}$$

と書けているする。$C_1, C_2, \ldots, C_n$ は縦ベクトルであり、$B_1, B_2, \ldots, B_n$ は横ベクトルであるとする。このとき(8)から(10)を導くときの逆演算により$2(n-1)$行$2(n-1)$列の行列Aをすべての要素が0又は1で$\det(A)=1$となるように選んで、(11)を

$$\begin{vmatrix} A & B_1' & B_2' & \ldots & B_n' & 0 \\ C_1' & D_1 & 0 & \ldots & 0 & E_1 \\ C_2' & 0 & D_2 & \ldots & 0 & E_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_n' & 0 & 0 & \ldots & D_n & E_n \\ 0 & F_1 & F_2 & \ldots & F_n & D' \end{vmatrix} \tag{12}$$

と書き直す。これが1つ格子点をn個の格子点に分割する仕方に対応する。イジング模型では(4)は(11)の形を取り、これは常に可能である。

相関関数の図形についての格子点の分割と合併が、文献5に与えられている。

文　献

1. T. Morita, J. Phys. A 19 (1986), 1197

2. T. Morita, Prog. Theor. Phys. 83 (1990), 701

3. 守田徹、数理解析研究所講究録(1992).

4. T. Morita, J. Phys. Soc. Jpn. 61 (1992), 470.

5. T. Morita, J. Phys. Soc. Jpn. 61 (1992), 2694.